Auswahlaxiom, Zornsches Lemma und Wohlordnungssatz

Uwe Liebe Sven Hermann

14. Oktober 97

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Auswahlaxiom	4
3	Ordnung	5
4	Zornsches Lemma	9
5	Wohlordnungssatz	11
6	Zurück zum Auswahlaxiom	13

Kapitel 1

Einleitung

Das Auswahlaxiom, das Zornsche Lemma und der Wohlordnungssatz von Zermelo sind nicht nur für die Topologie wichtig, sondern sind von grundlegender Bedeutung für verschiedenste Bereiche der Mathematik. So z.B. für

- die Topologie :
Existenz einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ die gegen ein beliebiges $x \in \bar{A}$ konvergiert [1, Satz 6.6] mit dem Auswahlaxiom.
Existenz eines Ultrafilters zu jedem Filter [1, Satz 6.40] mit dem Zornschem Lemma.
- die Lineare Algebra :
Beweis der Existenz einer Basis in jedem Vektorraum mit dem Zornschen Lemma [2, Satz 6.2] oder dem Wohlordnungssatz [3, Nr.110, Satz 2] .
- die Algebra :
Beweis der Existenz maximaler Ideale in Ringen mit 1 mit dem Zornschen Lemma [4, Satz 3.3.9].
- die Analysis :
Beweis des Zwischenwertsatzes mit dem Auswahlaxiom [5, Satz 5.4](Man achte hier auf die Formulierung „man wähle eines aus“).

Wir werden in unserem Vortrag zunächst einmal die verschiedenen Versionen des Auswahlaxiomes vorstellen und deren Äquivalenz zeigen. Danach weisen wir die Äquivalenz von Auswahlaxiom, Zornschen Lemma und Wohlordnungssatz nach, indem wir mittels Ringschluß vom Auswahlaxiom aufs Zornsche Lemma, vom Zornschen Lemma auf den Wohlordnungssatz und vom Wohlordnungssatz auf das Auswahlaxiom schließen.

Kapitel 2

Auswahlaxiom

Erste Fassung: *Das kartesische Produkt einer nicht leeren Familie nicht leerer Mengen ist nicht leer, d.h.*

$$I \neq \emptyset \wedge M_\alpha \neq \emptyset \quad \forall \alpha \in I \implies \prod_{\alpha \in I} M_\alpha \neq \emptyset.$$

Anders ausgedrückt: *Es sei N eine beliebige Menge und $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine zu einer nicht leeren Indexmenge I gehörigen Familie von nicht leeren Mengen $M_\alpha \subseteq N \quad \forall \alpha \in I$. Dann existiert eine Funktion $f : I \rightarrow N$, die jedem Element $\alpha \in I$ ein Element $f(\alpha) \in M_\alpha$ zuordnet.*

Zweite Fassung: *Ist $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ ein Mengensystem paarweise disjunkter, nicht leerer Mengen, dann existiert eine Auswahlmenge S , die aus jedem $A \in \mathfrak{S}$ genau ein Element enthält.*

Diese zwei Fassungen sind äquivalent. Das sieht man wie folgt (mittels Ringschluß):

Daß aus der ersten Fassung die zweite folgt, ist unmittelbar zu sehen. Die Auswahlmenge S im Sinne der zweiten Fassung ist nichts anderes als das Bild der Auswahlfunktion f der ersten Fassung. Da die Mengen $A \in \mathfrak{S}$ paarweise disjunkt sind, hat das Bild der Auswahlfunktion f genau ein Element mit jedem A gemein.

Sei nun umgekehrt $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Mengenfamilie mit $M_\alpha \neq \emptyset \quad \forall \alpha \in I \wedge I \neq \emptyset$. Bilde die Mengenfamilie bestehend aus $M'_\alpha = \{(\alpha, x) \mid x \in M_\alpha\}, \alpha \in I$. Diese Mengen sind dann paarweise disjunkt. Also gibt es nach der dritten Fassung eine Auswahlmenge S , die aus jedem M'_α ein Element (α, x) mit $x \in M_\alpha$ enthält. Diese Menge S ist aber nichts anderes als die gesuchte Auswahlfunktion f .

q.e.d.

Kapitel 3

Ordnung

Definition 3.0.1 Eine Menge M mit einer auf ihr erklärten Relation $\preceq$ heißt **halbgeordnet**, wenn auf ihr gilt:

(HO1) $\forall x \in M \quad x \preceq x$ (REFLEXIVITÄT).

(HO2) Aus $x \preceq y$ und $y \preceq x$ folgt $x = y$ für $x, y \in M$ (ANTISYMMETRIE).

(HO3) Aus $x \preceq y$ und $y \preceq z$ folgt $x \preceq z$ für $x, y, z \in M$ (TRANSITIVITÄT).

Die Relation $\preceq$ in M heißt **Halbordnung** auf M .

Beispiel 3.0.1 Beispiele für Halbordnung sind $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathfrak{P}(X), \subseteq)$ bzgl. einer beliebigen Menge X und die Teilbarkeitsrelation $(\mathbb{N}, |)$.

Definition 3.0.2 Eine Halbordnung $\preceq$ auf einer Menge M heißt **totale Ordnung**, falls gilt:

(TO) Für alle $x, y \in M$ ist $x \preceq y$ oder $y \preceq x$.

M heißt dann durch $\preceq$ **total geordnet**.

Beispiel 3.0.2 $(\mathbb{R}, \leq)$ ist total geordnet, $(\mathfrak{P}(X), \subseteq)$ bzgl. einer beliebigen Menge X und die natürlichen Zahlen mit der üblichen Teilbarkeitsrelation $(\mathbb{N}, |)$ sind nicht total geordnet.

Definition 3.0.3 Sei $\preceq$ eine Halbordnung auf einer Menge M .

a) Ein Element $x \in M$ heißt **erstes (letztes) Element** von M , falls $x \preceq y$ ($y \preceq x$) für alle $y \in M$ gilt.

b) Ein Element $x \in M$ heißt **minimal (maximal)**, falls aus $y \in M$ und $y \preceq x$ ($x \preceq y$) stets $x = y$ folgt.

c) Ein Element $x \in M$ heißt **untere (obere) Schranke** für $A \subset M$, wenn $x \preceq y$ ($y \preceq x$) für alle $y \in A$ gilt.

d) Ein Element $x \in M$ heißt **Infimum (Supremum)** für $A \subset M$, wenn x untere (obere) Schranke für A ist, und für jede weitere untere (obere) Schranke y von A gilt $y \preceq x$ ($x \preceq y$).

Das erste (letzte) Element einer Menge ist, sofern es existiert, eindeutig bestimmt. Dagegen kann eine Menge mehrere minimale (maximale) Elemente besitzen. Ist x erstes (letztes) Element einer Menge X , dann ist es gleichzeitig das einzige minimale (maximale) Element von X . Bei einer total geordneten Menge sind die Begriffe erstes und minimales Element sowie letztes und maximales Element äquivalent. Das Infimum einer Menge A ist das letzte Element der Menge aller unteren Schranken von A . Natürlich braucht eine Menge A kein Infimum zu besitzen, denn die Menge aller unteren Schranken von A braucht kein letztes Element zu haben. Dies gilt insbesondere, wenn A überhaupt keine untere Schranke besitzt. Entsprechend ist das Supremum der Menge A das erste Element der Menge der oberen Schranken von A .

Beispiel 3.0.3 $\emptyset$ ist erstes und minimales Element von $\mathfrak{P}(X)$, X beliebige Menge. X ist letztes und maximales Element von $\mathfrak{P}(X)$. Wählt man dagegen $Y = \mathfrak{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$, dann sind sämtliche einelementigen Teilmengen von X minimale Elemente von Y . Aber Y besitzt kein erstes Element. X ist nach wie vor letztes und maximales Element von Y .

Definition 3.0.4 Eine halbgeordnete Menge M heißt **wohlgeordnet**, wenn gilt:
(WO) Jede ihrer nicht leeren Teilmengen besitzt ein erstes Element.

(Die leere Menge gilt als wohlgeordnet.)

Beispiel 3.0.4 Die übliche $\leq$ -Relation auf $\mathbb{N}$ ist eine Wohlordnung. Die übliche $\leq$ -Relation auf $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ ist keine Wohlordnung.

Satz 3.0.1 Ist M wohlgeordnet, so ist M total geordnet.

Beweis:

Jede zweielementige Teilmenge $\{x, y\}$ hat nach Voraussetzung ein erstes Element. D.h. $x \preceq y$ oder $y \preceq x$ für alle $x, y \in M$ und ist damit total geordnet.

q.e.d.

Definition 3.0.5 Als **Abschnitt** $M_x (x \in M)$ einer wohlgeordneten Menge M bezeichnen wir die Menge aller Elemente $y \in M$, die kleiner sind als x .

$$M_x = \{y \in M \mid y \prec x\}$$

Als **Anfangsstück** A einer Menge M bezeichnen wir die Menge selbst und ihre Abschnitte.

Bevor wir zum Beweis des Zornschen Lemmas und des Wohlordnungssatzes kommen, benötigen wir noch einen Hilfssatz. Dabei bezeichnen wir, wenn M eine halbgeordnete Menge ist, als *wohlgeordnete Teile* von M diejenigen Teilmengen, in denen die in M geltende Halbordnungsrelation eine Wohlordnung bewirkt.

Satz 3.0.2 (Hilfssatz) Es sei $(W_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von wohlgeordneten Teilen der halbgeordneten Menge M , wobei für zwei Elemente W_β, W_γ der Familie gilt: W_β ist ein Anfangsstück von W_γ oder W_γ ein Anfangsstück von W_β . Dann ist die Vereinigung $W = \bigcup_{\alpha \in I} W_\alpha$ ebenfalls ein wohlgeordneter Teil, und es ist jedes W_α ein Anfangsstück von W .

Beweis:

Als Vereinigung von Teilmengen von M ist W eine Teilmenge von M und somit halbgeordnet. Wir zeigen zunächst, daß W total geordnet ist. Sind x, y zwei beliebige Elemente aus W , so gilt: $x \in W_\alpha, y \in W_\beta$ für passende $\alpha, \beta \in I$. Nun sei o.B.d.A. W_α ein Anfangsstück von W_β . Also liegen die beiden Elemente x, y in W_β . Und da W_β wohlgeordnet ist, muß $x \preceq y$ oder $y \preceq x$ sein.

Um noch nachzuweisen, daß W wohlgeordnet ist, wählen wir eine beliebige Teilmenge $\emptyset \neq U \subseteq W$, und zeigen, daß U ein erstes Element besitzt. Ist $x \in U$, so ist $x \in W_\alpha$ für ein bestimmtes $\alpha \in I$. Der Durchschnitt $U \cap W_\alpha$ besitzt als Teilmenge der wohlgeordneten Menge W_α ein erstes Element x_0 . Von ihm läßt sich zeigen, daß es auch erstes Element von U ist. Wir vergleichen es dazu mit einem beliebigen $y \in U$ und haben zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Es ist $y \in W_\alpha$ und damit $y \in U \cap W_\alpha$. Dann gilt nach der Definition von x_0 gewiß $x_0 \preceq y$.
2. Es ist $y \notin W_\alpha$. Ist dann $y \in W_\beta$, so kann W_β nicht Anfangsstück von W_α sein, also ist W_α Anfangsstück von W_β . Aus $y \notin W_\alpha$ folgt hiernach: $y \in W_\beta - W_\alpha$, was zusammen mit $x_0 \in W_\alpha$ auf $x_0 \prec y$ führt.

In jedem Fall ist also $x_0 \preceq y$ für $y \in U$, also ist x_0 erstes Element von U . Somit hat jede Teilmenge $U \subseteq W$ ein erstes Element, und daher ist W wohlgeordnet.

Es bleibt noch zu zeigen, daß jedes W_α Anfangsstück von W ist. Sei dazu $W_\alpha \in (W_\beta)_{\beta \in I}$ beliebig. Damit ist W_α Teilmenge von W . Fallunterscheidung:

1. $W_\alpha = W$. Dann ist W_α Anfangsstück von W nach Definition.
2. $W_\alpha \neq W$. D.h. $A := W \setminus W_\alpha \neq \emptyset$. A ist als Teilmenge von W wieder wohlgeordnet und besitzt somit ein erstes Element x . Da $A \subseteq \bigcup_{\beta \in I} W_\beta$ ist, existiert ein $\gamma \in I$, so daß $x \in W_\gamma$. Nach Voraussetzung gilt, daß W_α Anfangsstück von W_γ oder umgekehrt ist. Weil aber $x \notin W_\alpha$, muß W_α Anfangsstück von W_γ sein, und weiterhin gilt: $y \prec x \quad \forall y \in W_\alpha$. Somit ist $W_\alpha \subseteq W_x$. Da x erstes Element von $A = W \setminus W_\alpha$ ist, gilt sogar $W_\alpha = W_x$.

In beiden Fällen ist W_α ein Anfangsstück von W . Da wir W_α beliebig gewählt hatten, ist der Satz bewiesen.

q.e.d.

Kapitel 4

Zornsches Lemma

Satz 4.0.3 (Lemma von Zorn) *Es sei M eine nicht leere halbgeordnete Menge, in der jede total geordnete Teilmenge $A \subseteq M$ eine obere Schranke hat. Dann gibt es in M (wenigstens) ein maximales Element.*

Beweis:

Wir erbringen den Beweis in drei Schritten:

a) Jede total geordnete Teilmenge $A \subseteq M$ hat nach Voraussetzung eine obere Schranke s . Unter Berufung auf das Auswahlaxiom denken wir uns jeder dieser Teilmengen A eine dieser Schranken als $s(A)$ zugeordnet. Dabei soll für alle A , bei denen dies möglich ist, $s(A)$ so ausgewählt sein, daß nicht nur $x \preceq s(A)$ für alle $x \in A$, sondern schärfer $x \prec s(A)$ für alle $x \in A$ gilt. Das hat zur Folge, daß $s(A) \in A$ nur dann für eine total geordnete Teilmenge $A \subseteq M$ zutrifft, wenn er ein letztes Element besitzt, und dieses in M maximal ist.

b) Sei $\preceq$ eine Halbordnung auf einer Menge M . Eine Teilmenge $A \subseteq M$ heißt eine **Kette** in M , falls $\preceq \cap (A \times A)$ eine totale Ordnung auf A ist, d.h., wenn A mit der von M übernommenen Ordnung eine total geordnete Menge ist.

(So ist z.B. die Menge $A := \{(-a, a) \subseteq \mathbb{R} \mid a > 0\}$ eine Kette in $\mathfrak{P}(\mathbb{R})$.)

Eine Kette $A \subseteq M$ heißt **ausgezeichnet**, wenn A wohlgeordnet ist, und für jeden **Abschnitt** $A_x := \{y \in A \mid y \prec x\}$ gilt: $x = s(A_x)$. Alle ausgezeichneten Ketten beginnen also gleich mit $s_1 = s(\emptyset)$, $s_2 = s(\{s_1\})$, $s_3 = s(\{s_1, s_2\})$, u.s.w.. Wir behaupten nun: Von zwei ausgezeichneten Ketten A, B ist die eine ein Anfangsstück der anderen.

Zum Beweis sei H die Vereinigung aller gemeinsamen Anfangsstücke von A und B . Wie unmittelbar zu sehen ist, ist H selbst ein gemeinsames Anfangsstück von A und B , und zwar das umfassendste. Das hat zur Folge, daß $H = A$ oder $H = B$

sein muß. Träfe dies nicht zu, so wäre H sowohl ein Abschnitt von A als auch von B , also

$$H = A_x = B_y \quad \text{mit} \quad x \in A, y \in B$$

und

$$x = s(A_x) = s(B_y) = y.$$

Damit wäre aber $H \cup \{x\}$ ein umfassenderes gemeinsames Anfangsstück von A und B als H . Ein solches Anfangsstück gibt es nicht. Es muß also $H = A$ oder $H = B$ und damit B ein Anfangsstück von A oder A ein solches von B sein.

c) Wir bilden nun die Vereinigung V aller ausgezeichneten Ketten. Da von zwei ausgezeichneten Ketten A, B die eine ein Anfangsstück der anderen ist, so ist V nach dem oben bewiesenen Hilfssatz wohlgeordnet. Außerdem ist jede ausgezeichnete Kette ein Anfangsstück von V . Ein beliebiges Element $x \in V$ ist Element einer gewissen ausgezeichneten Kette A . Weil A ein Anfangsstück von V ist, so gilt für die durch x bestimmten Abschnitte $A_x = V_x$ (siehe ...) und damit $x = s(A_x) = s(V_x)$. Hiernach ist V selbst eine ausgezeichnete Kette und als Vereinigung aller ausgezeichneten Ketten die umfassendste. Dies hat zur Folge, daß $s(V) \in V$ ist, weil sonst $V \cup \{s(V)\}$ eine umfassendere ausgezeichnete Kette als V wäre. Somit ist $s(V)$ letztes Element von V und maximal in M .

q.e.d.

Kapitel 5

Wohlordnungssatz

Satz 5.0.4 (Wohlordnungssatz) *Jede Menge kann wohlgeordnet werden.*

Beweis:

Zur Menge M betrachte die Menge $\mathfrak{M}$ der Paare $(A, \leq)$ mit $A \subseteq M$, $\leq$ Wohlordnung auf A . Setze $(A_1, \leq_1) \preceq (A_2, \leq_2)$, falls A_1 mit der Anordnung $\leq_1$ ein Anfangsstück von A_2 mit der Anordnung $\leq_2$ ist. Dies definiert offensichtlich eine Halbordnung auf den Paaren $(A, \leq)$.

Nun sei $((A_\alpha, \leq_\alpha))_{\alpha \in I}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{M}$ (mit I beliebige Indexmenge), die bezüglich der in $\mathfrak{M}$ geltenden Relation $\preceq$ total geordnet ist. Wir behaupten, daß die Vereinigung $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ durch die in den Mengen A_α bestehenden Wohlordnungen $\leq_\alpha$ ebenfalls wohlgeordnet ist, und daß dabei jede Menge A_α ein Anfangsstück von A ist.

Zum Beweis seien x, y zwei beliebige Elemente aus A . Es möge $x \in A_\alpha, y \in A_\beta$ gelten, und zwar o.B.d.A. derart, daß A_α ein Anfangsstück von A_β ist. Dann ist auch $x \in A_\beta$, und auf Grund der in A_β geltenden Ordnung $\leq_\beta$ ist $x \leq_\beta y$ oder $y \leq_\beta x$. Jede andere Menge $(A_\gamma, \leq_\gamma) \in ((A_\alpha, \leq_\alpha))_{\alpha \in I}$ welche ebenfalls x und y enthält, führt zu derselben Relation zwischen x und y , weil A_γ ein Anfangsstück von A_β ist, oder A_β als Anfangsstück besitzt. D.h., man kann die zutreffende Relation auf A übertragen, und erhält dadurch eine Ordnung auf A , da $x, y \in A$ beliebig gewählt waren.

Nun können wir den Hilfssatz auf die Familie $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ und A anwenden. Dies ergibt, daß A wohlgeordnet ist, und jede Menge A_α ein Anfangsstück von A darstellt.

Damit ist $A \in \mathfrak{M}$ und eine obere Schranke von $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$. Es hat somit jede geordnete Teilmenge $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ von $\mathfrak{M}$ eine obere Schranke, und wir können das Zornsche Lemma anwenden. Es existiert also in $\mathfrak{M}$ ein maximales Element $(A_m, \leq_m)$.

So ein maximales Element $(A_m, \leq_m)$ erfüllt $A_m = M$. Denn sonst existierte ein $x \in M$ mit $x \notin A_m$, und $A_m \cup \{x\}$ würde durch $\leq'$ wohlgeordnet. Dabei ist $\leq'$ definiert durch $\leq_m$ auf A_m und die Bestimmung $y \leq' x$ für alle $y \in A_m$, d.h. $\leq' = \leq_m \cup \{(y, x) \mid y \in A_m \cup \{x\}\}$. Und das entstehende Paar $(A_m \cup \{x\}, \leq')$ wäre größer als $(A, \leq_m)$.

q.e.d.

Kapitel 6

Zurück zum Auswahlaxiom

Nun soll noch gezeigt werden, daß aus dem Wohlordnungssatz das Auswahlaxiom folgt.

Beweis:

Es sei $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie von nicht leeren Mengen (I Indexmenge). Nach dem Wohlordnungssatz kann ihre Vereinigung $M = \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$ wohlgeordnet werden. In der wohlgeordneten Menge M besitzt jede Teilmenge M_α ein erstes Element. Eine Auswahlfunktion für die Familie $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ kann daher durch die Vorschrift, sie soll jedem $\alpha \in I$ das erste Element der Menge M_α zuordnen, festgelegt werden. Also ist $\prod_{\alpha \in I} M_\alpha \neq \emptyset$.

q.e.d.

Ebenfalls mit dem Auswahlaxiom, dem Zornschen Lemma und dem Wohlordnungssatz äquivalent sind der Maximalmengensatz von Tukey und der Maximalkettensatz von Hausdorff. Diese Sätze werden hier ohne Beweis angegeben:

Satz 6.0.5 (Maximalmengensatz von Tukey) *Jede nicht leere Familie von Mengen von endlichem Charakter hat ein maximales Element.*

Dabei heißt eine Familie $(M_\alpha)_{\alpha \in I}$ von endlichem Charakter, wenn für alle $\alpha \in I$ gilt: Jede endliche Teilmenge $A \subseteq M_\alpha$ ist Element der Familie, also $A \in (M_\alpha)_{\alpha \in I}$.

Satz 6.0.6 (Maximalkettensatz von Hausdorff) *Ist $\mathfrak{A}$ eine Familie von Mengen und $\mathfrak{K}$ eine Kette in $\mathfrak{A}$, dann existiert eine maximale Kette in $\mathfrak{A}$, welche $\mathfrak{K}$ enthält.*

Abschließend sei noch bemerkt, daß die von uns aufgeführten Beweise im wesentlichen [3] entnommen sind.

Literaturverzeichnis

- [1] Stens „Vorlesung Topologie WS 96/97 “
- [2] Kowalsky „Lineare Algebra“
- [3] Mangoldt-Knopp „Einführung in die höhere Mathematik IV“
- [4] Meyberg „ Algebra I “
- [5] Grauert-Lieb „Differential- und Integralrechnung I “